



دخترچه سوالات و پاسخ تستی مرحله اول

بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل **۳۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- میانگین ۶ عدد برابر ۷ است. اگر دو تا از این اعداد را کنار بگذاریم، میانگین اعداد باقی مانده برابر ۸ می شود، مجموع دو عدد کنار گذاشته شده چند است؟

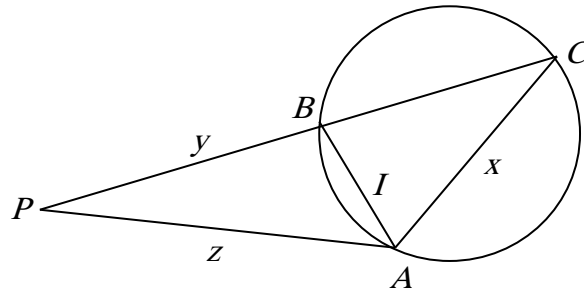
- (الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) ۱۲

۲- یک مربع به ۷ مستطیل برابر، مطابق شکل زیر تقسیم شده است، اگر محیط هر مستطیل برابر ۳۲ باشد، محیط مربع چقدر است؟



- (الف) ۵۶ (ب) ۹۸ (ج) ۱۱۲ (د) ۱۹۶ (ه) ۲۲۴

۳- در شکل زیر PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می دانیم که $AB = 1$. طول AC چقدر است؟



- (الف) $\frac{3}{2}$ (ب) $\sqrt{2}$ (ج) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ (د) ۲ (ه) هیچ کدام

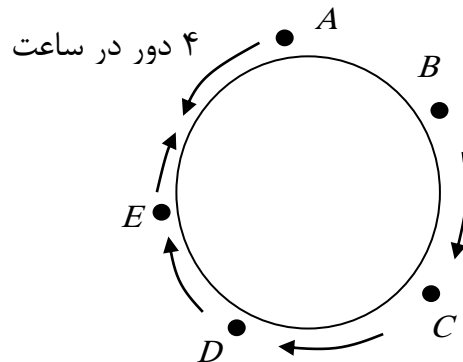
۴- در چند زیرمجموعه از $1, 2, \dots, 10$ مجموع کوچک ترین و بزرگ ترین عضو برابر ۱۱ است؟

- (الف) ۳۲۰ (ب) ۳۲۸ (ج) ۳۴۱ (د) ۳۵۲ (ه) ۳۶۴

۵- کدام ترتیب برای اعداد $۳^{۳۳۳}$ و $۶^{۲۲۲}$ و $۲^{۵۵۵}$ درست است؟

- (الف) $۳^{۳۳۳} < ۶^{۲۲۲} < ۲^{۵۵۵}$ (ب) $۶^{۲۲۲} < ۳^{۳۳۳} < ۲^{۵۵۵}$
 (ج) $۲^{۵۵۵} < ۶^{۲۲۲} < ۳^{۳۳۳}$ (د) $۲^{۵۵۵} < ۳^{۳۳۳} < ۶^{۲۲۲}$
 (ه) $۳^{۳۳۳} < ۲^{۵۵۵} < ۶^{۲۲۲}$

۶- در یک پیست دو میدانی دایره‌وار پنج دونه A, B, C, D, E به فاصله‌های مساوی روی پیست قرار گرفته‌اند (مانند شکل) و چوبی در دست دونه A قرار دارد. بعد از شروع مسابقه، دونه A با سرعت ۴ دور در ساعت (یعنی در هر ساعت چهار بار دور پیست را طی می‌کند) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و دونه‌های D, C, B, E با سرعت ۱ دور در ساعت در جهت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت می‌کنند.



در ضمن در هر زمان که دو دونه از کنار هم عبور کنند و چوب در دست یکی از آن‌ها باشد، آن را به دیگری می‌دهد. بعد از گذشت ۱ ساعت چوب در دست کدام دونه است؟

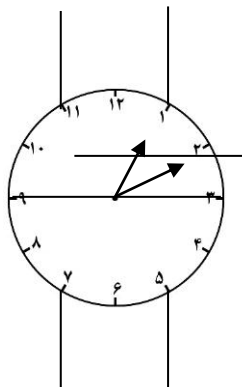
- الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

۷- سه دایره C_1, C_2, C_3 به شعاع ۵ و به مراکز O_1, O_2, O_3 طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که $O_1O_2 = 6$ ، $O_1O_3 = 8$ و O_2O_3 بر O_1O_3 عمود است. مساحت ناحیه‌ای از C_1 که با C_2 و C_3 تداخل ندارد، چقدر است؟

- الف) 10π ب) 12π ج) ۲۴ د) ۴۸ ه) ۵۴

۸- جمله $1-3+5-7+9-11+13-15+\dots$ در دنباله $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, \dots$ برابر چند است؟

- الف) ۵۰ ب) ۵۱ ج) ۵۲ د) ۵۳ ه) ۵۴



۹- یک ساعت عقربه‌ای جادویی در اختیار داریم. این ساعت دارای یک خط طلایی است که شماره ۳ را به ۹ وصل کرده است. این ساعت ویژگی جالبی دارد و آن این است که هرگاه خط طلایی نیم‌ساز داخلی دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار شود، ساعت زنگ می‌زند. در حال حاضر ساعت ۱:۱۲ ظهر می‌باشد، تا ساعت ۱:۱۲ شب ساعت چند بار زنگ می‌زند؟

- الف) ۶ ب) ۹
ج) ۱۱ د) ۱۲
ه) ۱۳

۱۰- گوییم دایره A بر دایره B عمود است، اگر یکدیگر را قطع کنند و مماس‌های A و B در نقطه برخوردشان بر هم عمود باشند. اگر A و B بر هم عمود باشند و شعاع‌های A و B به ترتیب $1/5$ و ۲ باشد، فاصله مراکز A و B چقدر است؟

- الف) $1/5$ ب) $2/5$ ج) ۳ د) $3/5$ ه) معلوم نیست.

۱۱- ماه در دبیرستان پسرانه ابن سینا تعدادی دانش آموز تحصیل می کنند. اگر دو دانش آموز از این مدرسه دوست باشند، پدرهای این دو دانش آموز نیز با هم دوست هستند (دوستی یک رابطه دو طرفه است و هیچ کس با خودش دوست نیست). کدام گزینه قطعاً درست است؟

(الف) اگر حامد (یکی از دانش آموزان مدرسه) دوست در دبیرستان داشته باشد، آن گاه ابوحامد (پدر حامد) حداقل k دوست در میان پدرهای دانش آموزان دبیرستان دارد.

(ب) اگر حامد k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن گاه ابوحامد حداکثر k دوست در میان پدرهای دانش آموزان دبیرستان دارد.

(ج) اگر k دانش آموز از دبیرستان موجود باشند که هیچ دوتایی از آنها دوست نباشند، آن گاه در میان پدرهای دانش آموزان دبیرستان k نفر وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

(د) اگر در میان پدرهای دانش آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دوتایی دوست نباشند، آن گاه k دانش آموز وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

(ه) اگر حسام برادر کوچکتر حامد باشد، آن گاه حسام و حامد با هم دوست هستند (حسام و حامد هر دو در دبیرستان ابن سینا تحصیل می کنند).

۱۲- ماه در میان اعداد صحیح از ۱ تا ۲۰۰۲ چند عدد مجموع رقم هایشان بر ۵ بخش پذیر است؟

(الف) ۳۹۷

(ب) ۳۹۸

(ج) ۳۹۹

(د) ۴۰۰

(ه) ۴۰۱

۱۳- ماه در مثلث ABC داریم: $\angle C = 30^\circ$ و $\angle A = 90^\circ$ و $AB = 1$ و E و F به ترتیب روی اضلاع BC و AC طوری قرار دارند که $BC = 4CE$ و $AC = 6AF$ طول EF برابر است با

(الف) ۱

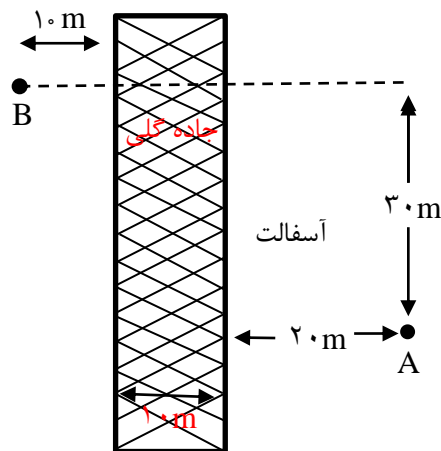
(ب) $\frac{\sqrt{39}}{6}$

(ج) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

(د) $\frac{3}{2}$

(ه) قابل محاسبه نمی باشد.

۱۴- ماه مطابق شکل مقابل، یک دونده در نقطه A قرار دارد و می خواهد در کمترین زمان ممکن خود را به B برساند. در مسیر حرکت او یک جاده گلی وجود دارد که باعث می شود سرعت حرکتش حین گذر از آن به نصف کاهش یابد. سرعت حرکت دونده روی آسفالت ۱۰ متر بر ثانیه است. کمترین زمان ممکن را پیدا کنید.



(الف) $\sqrt{26}$ ثانیه

(ب) $\sqrt{20}$ ثانیه

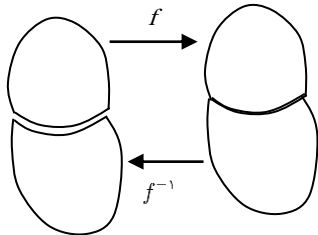
(ج) ۵ ثانیه

(د) $\sqrt{30}$ ثانیه

(ه) هیچ کدام

۱۵- یک صفحه بی‌نهایت در بی‌نهایت داریم که خانه‌های آن را به صورت شطرنجی، سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. شعاع دایره‌ای که همه نقاط محیط آن در خانه‌های سیاه قرار بگیرد حداکثر چقدر است؟ (طول هر خانه صفحه شطرنجی ۱ واحد است).

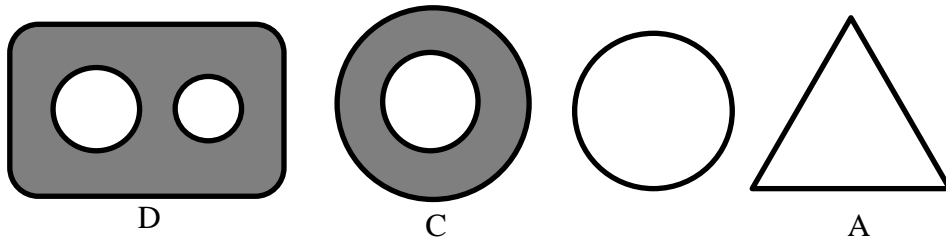
- (الف) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $\frac{3}{2}$ (ه) $\frac{\sqrt{6}}{2}$



۱۶- یک «تبدیل پیوسته» تبدیلی است که نقاطی که قبل از تبدیل نزدیک به هم هستند، بعد از تبدیل نیز نزدیک به هم بمانند. تبدیل f بین دو تکه خمیر را این‌طور در نظر می‌گیریم که لبه‌های دو تکه خمیر را به هم می‌چسباند و لذا تبدیل وارون آن، یعنی f^{-1} ، تکه خمیر بزرگ‌تر را به دو تکه خمیر جدا از هم تقسیم می‌کند. در این صورت:

- (الف) f و f^{-1} هر دو پیوسته‌اند. (ب) f و f^{-1} هیچ‌کدام پیوسته نیستند.
 (ج) f پیوسته است ولی f^{-1} پیوسته نیست. (د) f پیوسته نیست ولی f^{-1} پیوسته است.
 (ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق، درست نیست.

۱۷- اگر شکل A با تبدیلی پیوسته که وارون آن هم پیوسته است (در سؤال قبل تعریف شده است) قابل تبدیل به شکل B باشد، می‌گوییم این دو شکل «هم‌ریخت» هستند، اجسام زیر را در نظر بگیرید.



(فرض کنید A و B از سیم نرم ساخته شده‌اند و C و D نیز از خمیر ساخته شده‌اند). کدام گزینه درست است؟

- (الف) A و B هم‌ریختند ولی C و D هم‌ریخت نیستند. (ب) A و B هم‌ریختند و C و D نیز هم‌ریختند.
 (ج) A و B هم‌ریخت نیستند ولی C و D هم‌ریختند. (د) A و B هم‌ریخت نیستند و C و D نیز هم‌ریخت نیستند.
 (ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق درست نیست.

۱۸- مجموعه

$$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y, 2x^2 - 5xy + 2y^2 - x - y - 1 = 11$$

چند عضوی است؟

- (الف) این مجموعه تهی است. (ب) تک عضوی (ج) دو عضوی (د) سه عضوی (ه) این مجموعه نامتناهی است.

۱۹- ماگ می‌گوییم زیرمجموعه A از صفحه «ساختار دایره‌ای» دارد، اگر برای هر $x \in A$ ، دایره توپری به مرکز x وجود داشته باشد که کاملاً در A قرار بگیرد؛ به‌طور مشابه، می‌گوییم B «ساختار مثلثی» دارد هرگاه برای هر $x \in B$ ، مثلث متساوی‌الاضلاع توپری به مرکز

نقل x ، داخل B وجود داشته باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

(الف) دایره واحد، $D = (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1$ ساختار مثلثی دارد.

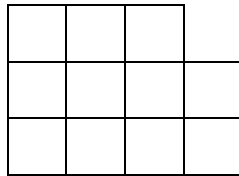
(ب) نیم‌صفحه $H = (x, y) \mid y > 0$ ساختار دایره‌ای دارد.

(ج) هر مجموعه‌ای که ساختار دایره‌ای داشته باشد، ساختار مثلثی دارد.

(د) هر مجموعه‌ای که ساختار مثلثی داشته باشد، ساختار دایره‌ای دارد.

(ه) می‌توان صفحه را به دو زیرمجموعه ناتهی طوری تقسیم کرد که یکی ساختار دایره‌ای و دیگری ساختار مثلثی داشته باشد.

۲۰- ماگ در شکل زیر چند مستطیل دیده می‌شود؟ (توجه کنید که هر مربع یک مستطیل است!)



(ه) ۶۴

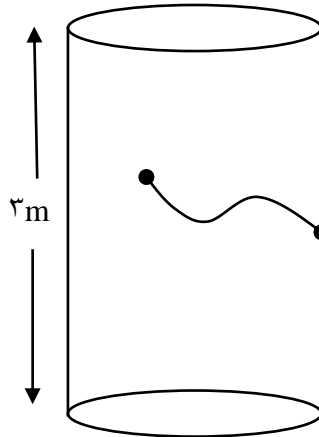
(د) ۵۶

(ج) ۵۰

(ب) ۴۸

(الف) ۴۰

۲۱- ماگ حشره‌ای را با نخ به طول ۱ متر به وسط یک استوانه به ارتفاع ۳ متر و محیط قاعده $\sqrt{3}$ متر، از بیرون بسته‌ایم! مساحت قسمتی از استوانه که حشره می‌تواند به آن برود، چقدر است؟



(ه) $2\sqrt{3}$

(د) $\pi + \sqrt{3}$

(ج) $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$

(ب) π

(الف) $\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۲- عدد حقیقی x را «جالب» می‌گوییم اگر در بسط اعشاری آن، بعد از ممیز، هر عدد طبیعی ظاهر شده باشد. مثلاً عدد ماژ

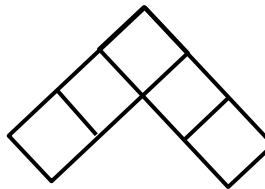
الف) در بسط اعشاری هر عدد جالب نامتناهی بار 1380 ظاهر می‌شود.

ب) هر عدد جالب گنگ است.

ج) اگر x و y دو عدد جالب باشند، $\frac{1}{x}$ و xy هم جالب هستند.

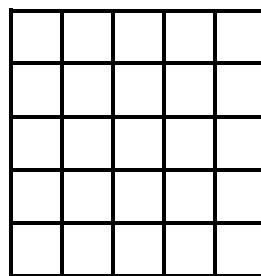
د) اگر x جالب باشد، عدد y هم که از حذف ارقام x به صورت یکی در میان به دست می‌آید، جالب است.

ه) اگر x جالب باشد، $1-x$ هم جالب است.



می‌توان در شکل زیر قرار داد، به نحوی که روی هم قرار نگیرند؟

حداکثر چند شکل مانند



ه) ۶

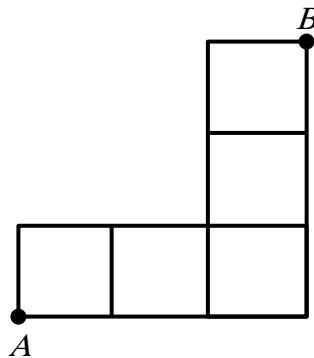
د) ۵

ج) ۴

ب) ۳

الف) ۲

۲۴- یک متحرک در نقطه A از شکل زیر قرار دارد. این متحرک می‌خواهد خود را به نقطه B برساند. متحرک می‌تواند روی خطوط شبکه حرکت کند و از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به B برساند؟ ماژ



ه) ۴۰

د) ۳۶

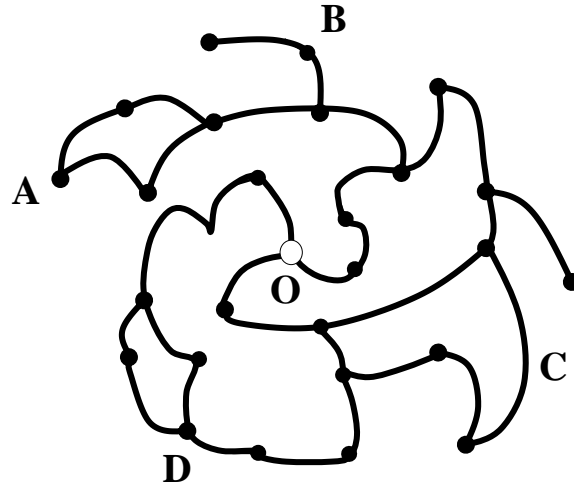
ج) ۳۲

ب) ۲۸

الف) ۲۴

آرش و علی روی شکل زیر با یک مهره مشغول بازی هستند، هر کس در نوبت خود می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد.

- مهره را روی یال‌ها در جهت ساعت‌گرد هر تعداد خانه که بخواهد حرکت دهد.
- مهره را روی یال متصل به رأس مجاور که در لایه درونی است (در صورت وجود چنین رأسی) حرکت دهد (رئوس هم لایه شبیه هم هستند).



هر کس مهره را به خانه مرکزی (O) برساند، برنده بازی است. فرض کنید آرش بازی را شروع کند و هیچ کس دچار اشتباه نشود. با آغاز از کدام خانه آرش برنده بازی خواهد بود؟

- (الف) B, A (ب) D, C (ج) D, A (د) A, C (ه) D, B

عدد n را خوب می‌نامیم اگر بتوان ارقام آن را به دو دسته چنان تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد. به عنوان مثال ۱۲۱ خوب است زیرا $۱+۱=۲$. فرض کنید x کوچک‌ترین عدد خوب باشد که $x+۱$ نیز خوب است، در این صورت:

- (الف) $۳۰۰ \leq x < ۴۰۰$ (ب) $۴۰۰ \leq x < ۵۰۰$ (ج) $۵۰۰ \leq x < ۶۰۰$ (د) $۶۰۰ \leq x < ۷۰۰$ (ه) $۷۰۰ \leq x < ۸۰۰$

اتومبیلی از شهر A به سمت شهر B در حرکت است و فاصله دو شهر ۱۰۰ کیلومتر است. حرکت اتومبیل این‌گونه است که وقتی در x کیلومتری شهر B قرار دارد با سرعت x کیلومتر بر ساعت در حرکت است. کدام گزینه درست است؟

- (الف) اتومبیل قبل از نیم ساعت ۵۰ کیلومتر اول را طی می‌کند.
 (ب) زمانی که اتومبیل ۵۰ کیلومتر آخر را طی می‌کند کمتر از ۲ ساعت است.
 (ج) زمانی که اتومبیل ۲۵ کیلومتر آخر را طی می‌کند کمتر از ۱ ساعت است.
 (د) زمان طی کردن ۲۵ کیلومتر سوم بیشتر از ۱ ساعت است.
 (ه) اتومبیل هیچ‌گاه به مقصد نمی‌رسد!

توجه: بارم سؤال‌های ۲۸ الی ۳۰ دو برابر بارم بقیه سؤال‌هاست (در نظر داشته باشید که نمره منفی این سؤال‌ها هم طبق همین قاعده محاسبه می‌شود).

در سه سؤال بعد منظور از «نقطه» عضوی از مجموعه Z^2 است، یعنی (m, n) هایی که m و n اعدادی صحیح هستند. زیرمجموعه A از Z^2 را «خط» می‌نامیم اگر اولاً ناتهی باشد، ثانیاً اعداد صحیح a ، b و c وجود داشته باشد که $a^2 + b^2 \neq 0$ و $A = \{(m, n) \in Z^2 \mid am + bn = c\}$ می‌گوییم دو خط A و B موازی‌اند، اگر $A \cap B = \emptyset$ یا $A = B$. اگر O یک نقطه و r یک عدد حقیقی نامنفی باشد، منظور از دایره به مرکز O و به شعاع r مجموعه نقاطی است که فاصله‌شان تا O برابر r است. خط A را بر دایره C مماس می‌گوییم، اگر $A \cap B$ تک عضوی باشد.

۲۸- کدام یک از عبارات‌های زیر درست است؟

۱. از هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط می‌گذرد.
 ۲. اگر x نقطه‌ای خارج از خط A باشد، دقیقاً یک خط وجود دارد که از x می‌گذرد و موازی A است.
 ۳. اگر A موازی B و B موازی C باشد، آن‌گاه A موازی C است.
 ۴. مجموعه نقاطی که از دو نقطه متمایز به یک فاصله‌اند، یک خط است.
- الف) ۱، ۲ و ۳ (ب) ۱ (ج) ۲، ۳ و ۴ (د) ۳ و ۴ (ه) همه عبارات

۲۹- کدام یک از مقادیر زیر می‌توانند تعداد نقاط یک دایره باشند؟

- الف) ۷ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) بی‌نهایت (ه) ب و ج

۳۰- با توجه به تعریف‌های بالا کدام گزینه درست است؟

- الف) از هر نقطه خارج یک دایره دقیقاً دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.
 ب) از هر نقطه روی دایره بی‌نهایت مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.
 ج) دو دایره متمایز حداکثر ۴ مماس مشترک دارد.
 د) از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می‌گذرد.
 ه) با زیاد شدن شعاع، تعداد نقاط روی دایره افزایش می‌یابد.

«کلید سؤالات»

۱	هـ د ج ب الف	۲۱	هـ د ج ب	۴۱	هـ د ج ب الف
۲	هـ د ج ب	۲۲	هـ د ب الف	۴۲	هـ د ج ب الف
۳	هـ د ج ب الف	۲۳	هـ د ب الف	۴۳	هـ د ج ب الف
۴	هـ د ب الف	۲۴	هـ د ج ب الف	۴۴	هـ د ج ب الف
۵	هـ د ج ب الف	۲۵	هـ د ج ب	۴۵	هـ د ج ب الف
۶	هـ د ج ب	۲۶	هـ د ب الف	۴۶	هـ د ج ب الف
۷	هـ د ج ب الف	۲۷	هـ د ج ب الف	۴۷	هـ د ج ب الف
۸	هـ د ج ب الف	۲۸	هـ د ج ب الف	۴۸	هـ د ج ب الف
۹	هـ د ج ب الف	۲۹	هـ د ب الف	۴۹	هـ د ج ب الف
۱۰	هـ د ج ب الف	۳۰	هـ د ج ب الف	۵۰	هـ د ج ب الف
۱۱	هـ د ج ب الف	۳۱	هـ د ج ب الف	۵۱	هـ د ج ب الف
۱۲	هـ د ب الف	۳۲	هـ د ج ب الف	۵۲	هـ د ج ب الف
۱۳	هـ د ج ب الف	۳۳	هـ د ج ب الف	۵۳	هـ د ج ب الف
۱۴	هـ د ج ب الف	۳۴	هـ د ج ب الف	۵۴	هـ د ج ب الف
۱۵	هـ د ج ب	۳۵	هـ د ج ب الف	۵۵	هـ د ج ب الف
۱۶	هـ د ب الف	۳۶	هـ د ج ب الف	۵۶	هـ د ج ب الف
۱۷	هـ د ج ب	۳۷	هـ د ج ب الف	۵۷	هـ د ج ب الف
۱۸	هـ د ج ب الف	۳۸	هـ د ج ب الف	۵۸	هـ د ج ب الف
۱۹	هـ د ج ب الف	۳۹	هـ د ج ب الف	۵۹	هـ د ج ب الف
۲۰	هـ د ج ب الف	۴۰	هـ د ج ب الف	۶۰	هـ د ج ب الف